

A INTUIÇÃO E O RIGOR NOS TRABALHOS DE ARQUIMEDES: REFLEXÕES PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DO CÁLCULO

André Lúcio Grande

andremath@uol.com.br

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO - BRASIL

Tema: I4 – Pensamento Matemático Avançado

Modalidade: CB

Nível educativo: Terciário Universitário

Palavras-chave: Arquimedes, intuição, rigor, ensino e aprendizagem do Cálculo.

Resumo

Este artigo, parte integrante de uma pesquisa de doutorado em andamento, visa analisar alguns aspectos do uso da intuição e do rigor na obra “O Método”, de Arquimedes, sob o ponto de vista do filósofo e matemático francês Henri Poincaré e do psicólogo romeno Efrain Fischbein. Por meio dessa análise, objetiva-se discutir quais as implicações desse uso no processo de criação matemática, quais foram os resultados obtidos que contribuíram para a gênese e o desenvolvimento do Cálculo, bem como o legado deixado por essas descobertas. Serão descritas as estratégias utilizadas por Arquimedes na resolução do problema da área da parábola. Esta pesquisa se caracteriza como sendo qualitativa, em que por meio de uma pesquisa documental analisou-se livros sobre a história do Cálculo, teses e artigos relacionados ao ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral. Como resultados, observamos algumas características do uso da intuição e do rigor ligadas à construção do conhecimento matemático que são pertinentes de discussão e que se refletem no processo de ensino e aprendizagem do Cálculo.

1- A intuição e o rigor

No ensino do Cálculo, segundo pesquisas em Educação Matemática, nos últimos anos tem-se observado o predomínio de um modelo que privilegia a apresentação dos conceitos por meio de definições, demonstrações e exercícios não favorecendo inicialmente o desenvolvimento cognitivo dos alunos como o uso de analogias e da intuição na construção do conhecimento, seguido da apresentação de exemplos e contraexemplos até a etapa final da demonstração.

Refletindo sobre esse fato procuraremos abordar por meio de um exemplo ligado à história da Matemática, a importância do uso da intuição no processo de criação dos conceitos matemáticos em contraposição ao rigor.

Apesar de diversas concepções, pontos de vista e interpretações, o uso da intuição, imaginação, raciocínio dedutivo e visualização geométrica no processo de ensino e

aprendizagem da Matemática vêm sendo defendida e estudada por muitos pesquisadores.

O filósofo e matemático francês Henri Poincaré (1854 – 1912) considerava a intuição uma ideia ou interpretação antecipada daquilo que se está procurando, constituindo-se de um sentimento que possibilita gerar hipóteses e conjecturas na construção do conhecimento científico. O autor faz críticas à ciência concebida como absoluta e inquestionável, e discute a importância da intuição e da lógica nesse processo de construção.

Além de Poincaré (1995), o psicólogo romeno Efraim Fischbein (1920 – 1998) demonstra em seus trabalhos quais são as características do raciocínio intuitivo, algumas possíveis classificações para o mesmo bem como o papel e a importância do seu desenvolvimento na aquisição do conhecimento matemático.

Fischbein (1987) concebia a Matemática como uma criação humana, em que os objetos matemáticos devem ser construídos num processo de tentativas, erros, hesitações, conjecturas, demonstrações, provas e refutações. Para que os conceitos sejam desenvolvidos segundo essa perspectiva, deve-se levar em conta aspectos tais como o raciocínio intuitivo, o aspecto formal e algorítmico e suas inter-relações.

Para observarmos as características ligadas à intuição descritas anteriormente, analisaremos o exemplo da determinação da quadratura da parábola realizada por Arquimedes, que apresenta no seu bojo a gênese do Cálculo Integral.

2 – Arquimedes

Arquimedes (287 – 212 a. C.) nasceu na cidade de Siracusa, mas também segundo relatos de alguns historiadores da Antiguidade, passou um período da sua vida na cidade de Alexandria, no Egito.

Sobre os trabalhos de Arquimedes, segundo Eves (2004), dos matemáticos gregos da antiguidade, quem aplicou de maneira mais elegante o método de exaustão e com quem mais se aproximou da atual e verdadeira integração, sem dúvida foi Arquimedes. Com isso, podemos destacar a análise e alguns aspectos da importância e o real significado de seus trabalhos na compreensão das noções do Cálculo.

Tais trabalhos apresentavam uma estrutura lógica que merece ser destacada, em que suas descobertas eram obtidas por meios mecânicos, conhecido como “*O Método*”

utilizando-se da intuição, da imaginação e de alguns objetos físicos e geométricos, sendo posteriormente demonstradas rigorosamente pela dupla redução ao absurdo.

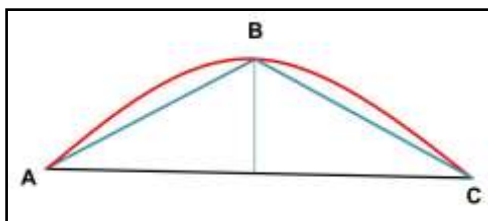
Algumas características, segundo Ávila (1986), são peculiares nas obras de Arquimedes: o estilo elíptico da linguagem, apresentando uma densidade de referências internas como, por exemplo, algumas propriedades geométricas, a dificuldade nas demonstrações pela dupla redução ao absurdo, a apresentação dos seus resultados expostos por um duplo método, o mecânico (escrito em forma de carta a Eratóstenes) e o geométrico. Como exemplo dessas características citadas pelo autor, na obra “*A quadratura da parábola*” são omitidas algumas demonstrações de proposições inteiras, apresentando uma demonstração “mecânica” (o método) e uma demonstração “geométrica” (o método da exaustão).

Dentre algumas obras de Arquimedes que constituem o denominado *Corpus arquimedeiano*, podemos citar uma que desempenhou um papel preponderante no desenvolvimento dos conceitos do Cálculo Integral, conhecido como “*O Método*”.

Como exemplo, destacaremos a quadratura da parábola, que consiste em calcular a área limitada sob um segmento parabólico, e que foi escrito por Arquimedes da seguinte maneira: “*Enunciarei o primeiro teorema que descobri por métodos mecânicos, isto é: qualquer segmento de parábola é quatro terços do triângulo com a mesma base e igual altura*”. (ÁVILA, 1986, p. 32). O teorema anteriormente descrito pode ser representado conforme a figura a seguir:

Sendo A_P = área do segmento parabólico e A_T = área do triângulo ABC, temos que:

Figura 01 – Área de um segmento parabólico (Arquimedes)



Fonte: Autor, 2013

$$A_P = \frac{4}{3} A_T$$

Para demonstrar o teorema, Arquimedes utilizou-se de algumas proposições sobre as propriedades geométricas da parábola. Tais proposições podem ser encontradas no livro *The Works of Archimedes*, de Thomas L. Heath (1912). Das proposições apresentadas nessa obra, destacaremos aquelas consideramos mais diretamente ligadas à

demonstração do problema da área do segmento parabólico. Essas propriedades, como por exemplo, a determinação do vértice da parábola são necessárias para a demonstração, que segundo Ávila (1986) são omitidas especificamente na obra “O Método”. São elas:

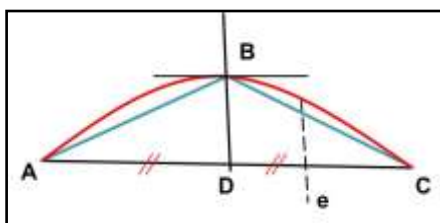
- Proposição 1:

Se por um ponto de uma parábola for traçada uma reta, de maneira que ela seja o eixo ou paralela ao eixo, como BD, e se AC é uma corda paralela a tangente à parábola em B, encontrando BD em D, então:

$$AD = DC$$

Consequentemente D é o ponto médio de AC.

Figura 02 – Proposição 1 (Arquimedes)



Fonte: Autor, 2013

- Proposição 2:

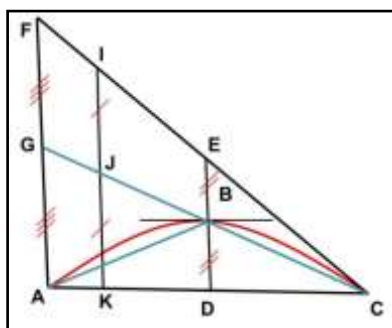
Se em uma parábola, AC for uma corda paralela a tangente à B e, se uma reta for traçada em B de tal forma que seja o eixo ou paralela ao eixo e esta reta encontrar AC em D e encontrar a tangente à parábola pelo ponto C em E, então:

$$DB = BE$$

Consequentemente, aplicando a mesma proposição para os segmentos KI e AF, temos que:

$$IJ = JK \text{ e } AG = GF$$

Figura 03 – Proposição 2 (Arquimedes)



Fonte: Autor, 2013

- Proposição 5:

Se AC é a base de um segmento qualquer de parábola, B é o vértice desse segmento, DB o seu diâmetro e, se o diâmetro da parábola através de qualquer outro ponto L , encontrar AC em K e a tangente à parábola em C no ponto I , então:

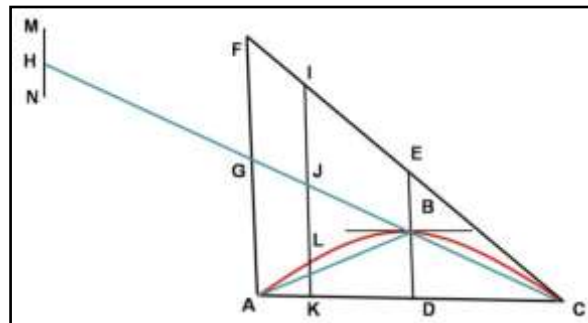
$$\frac{CK}{KA} = \frac{IL}{LK}, \text{ onde demonstra-se que:}$$

$$\frac{KI}{KL} = \frac{AC}{AK}$$

Mas $\frac{AC}{AK} = \frac{GC}{CJ} = \frac{GH}{GJ}$ e sendo $GH = CG$ de forma que:

$$\frac{KI}{KL} = \frac{GH}{GJ}$$

Figura 04 – Proposição 5 (Arquimedes)



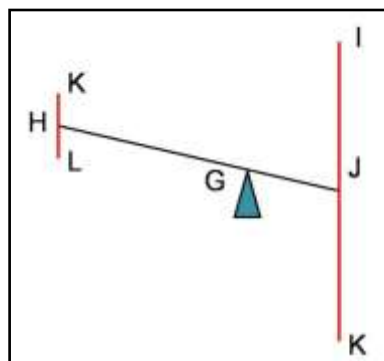
Fonte: Autor, 2013

Esta proporção pode ser escrita na seguinte maneira:

$$KI \cdot GJ = KL \cdot GH$$

Tal relação também pode ser denominada como a “Lei da Alavanca”, obtida pelo próprio Arquimedes em seu livro “*Sobre o Equilíbrio de Figuras Planas*”, representada geometricamente a seguir:

Figura 05 – Método da Alavanca (Arquimedes)

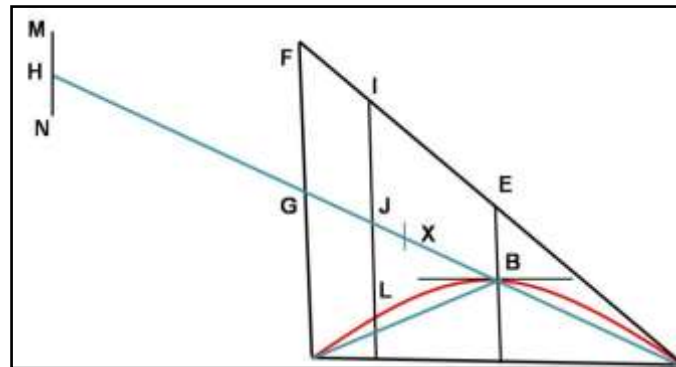


Fonte: Autor, 2013

Arquimedes se utiliza da intuição geométrica para concluir o raciocínio de sua descoberta que consiste na seguinte situação: variando o ponto L ao longo do arco da parábola $ALBC$, obtemos o triângulo AFC como união de todos os segmentos do tipo KI e o segmento de parábola como união de todos os segmentos do tipo KL .

O triângulo ABC (reunião dos infinitos segmentos KI) se equilibrará onde ele se encontra com o centroide X e o segmento de parábola ABC (reunião dos infinitos segmentos KL) com seu centroide em H , conforme figura a seguir:

Figura 06 – Equilíbrio de figuras planas (Arquimedes)



Fonte: Autor, 2013

O centro de gravidade (baricentro) do triângulo AFC é dado por:

$$GX = \frac{GC}{3} = \frac{GH}{3}$$

A área do triângulo AFC é quatro vezes a área do triângulo ABC , pois pela *Proposição 2*, $BD = BE$. Sendo $AF \parallel DE$, os triângulos BCD e GCA são semelhantes pelo caso AA (ângulo-ângulo).

Portanto, $\frac{GA}{BD} = \frac{AC}{DC}$ e $AG = 2 \cdot BD$.

Como $AG = GF$, temos que $AF = 4 \cdot BD$.

Com isso, $A_{\Delta AFC} = 4 \cdot A_{\Delta ABC}$.

Sendo $A_{\Delta AFC}$ a área do triângulo AFC e A_p a área do segmento parabólico, pela lei do equilíbrio da alavanca:

$$A_{\Delta ABC} \cdot GX = A_p \cdot GH$$

Como $GX = \frac{GH}{3}$ e $A_{\Delta AFC} = 4 \cdot A_{\Delta ABC}$, temos que:

$$4 \cdot A_{\Delta ABC} \cdot \frac{GH}{3} = A_p \cdot GH \Leftrightarrow A_p = \frac{4}{3} A_{\Delta ABC}$$

Com isso, Arquimedes partindo do resultado encontrado pelo método mecânico, demonstrou que a área do segmento parabólico é igual a quatro terços do triângulo com a mesma base e igual altura.

Para a demonstração do resultado intuído sobre a área do segmento parabólico, Arquimedes apresenta o lado rigoroso de sua obra utilizando-se do chamado “método da exaustão”, que já fora utilizado por Eudoxo, argumentado por “dupla redução ao absurdo”.

3 – Análise e Considerações Didáticas

O método descrito anteriormente utilizado por Arquimedes apresenta em sua essência alguns aspectos pertinentes de uma discussão e análise para o ensino e aprendizagem do Cálculo.

Quanto ao método mecânico criado por Arquimedes observa-se fortemente o apelo aos sentidos, à imaginação e analogia com objetos físicos (alavancas, equilíbrio estático) que segundo Poincaré (1995), constitui-se de um valioso instrumento da invenção do conhecimento matemático.

Essas descobertas realizadas por Arquimedes embasadas em sua intuição geométrica e posteriormente demonstradas pela dupla redução ao absurdo podem ser classificadas por Fischbein (1987) como intuições antecipatórias, pois representavam uma solução ainda preliminar e global do problema (a quadratura da parábola, o volume da esfera) que, por meio do uso de propriedades e teoremas da geometria formulou-se uma hipótese ligada ao sentimento de uma certeza (no caso, que a área de um segmento de parábola é quatro terços do triângulo com a mesma base e igual altura).

Quanto à demonstração pela dupla redução ao absurdo utilizada por Arquimedes, alguns pontos devem ser analisados. Se por um lado, o método mecânico que possibilitava a utilização da intuição geométrica pode ser considerado um instrumento de invenção, a demonstração pela redução ao absurdo não permite novas descobertas, pois sua utilização obriga que se conheça previamente o resultado que se deseja demonstrar.

Além disso, o exagero do rigor das demonstrações utilizando a “redução ao absurdo” nos trabalhos dos matemáticos gregos mostrou-se um método complicado que constituiu um fator que não permitia a generalizações das descobertas de Arquimedes.

Pode-se concluir que a gênese do Cálculo Diferencial e Integral esteve presente mesmo de forma implícita nos estudos de Arquimedes no século III a.C.

No que diz respeito às reflexões didáticas, pode-se considerar que os métodos e procedimentos utilizados por Arquimedes faz com que possamos refletir num ensino do Cálculo que favoreça inicialmente o desenvolvimento cognitivo do aluno como o uso de analogias e da intuição na construção do conhecimento, seguido da apresentação de exemplos e contraexemplos até a etapa da demonstração.

O legado deixado pela obra de Arquimedes pode ser observada posteriormente nos trabalhos de Johannes Kepler (séc. XVI) e Bonaventura Cavalieri (séc. XVII), dentre outros, que se apropriaram em grande medida da essência de algumas ideias intuídas por Arquimedes.

Portanto, apesar das dificuldades conjuntamente encontradas para um maior desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral na Antiguidade, pode-se considerar que os trabalhos de Arquimedes apoiados no método da exaustão utilizado também por Eudoxo constituiu a verdadeira “Aurora do Cálculo”, que contribuiu de forma incisiva nos estudos posteriores.

4- Referências

- Ávila, G. S. S. (1986). Arquimedes, o rigor e o método. In: *Revista do Professor de Matemática*. São Paulo: SBM.
- Eves, H. (2004). *Introdução à História da Matemática*. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora de UNICAMP.
- Fischbein, E. (1991). The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity. In: *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. Dordrecht: Kluwer Academic.
- _____. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Dordrecht: D. Reidel.
- Heath, T. L. (1912). *The Works of Archimedes*. Ed. T. L. Heath. New York: Dover.
- Poincaré, H. (1995). *O valor da ciência*. Tradução de Maria Helena Franco Martins. Rio de Janeiro: Contraponto.
- _____. (1984). *A Ciência e a Hipótese*. Tradução Maria Auxiliadora Kneipp. Brasília: Editora UNB.